考え方：凸多面集合上の線形計画問題の最適解

線形計画問題 (2.1) において，その実行可能集合 S が S の端点 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_1}$ と S の端方向 $\boldsymbol{d}_1, \cdots, \boldsymbol{d}_{k_2}$ によって

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i \boldsymbol{e}_i + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \boldsymbol{d}_j, \quad \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i \geqq 0 \; (i = 1, \cdots, k_1), \quad \mu_j \geqq 0 \; (j = 1, \cdots, k_2) \end{array} \right\}$$

と表されている場合，条件 (2.25) が成り立てば，(2.1) の最適値は

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_{i_0} = \min_{i=1,\cdots,k_1} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_i$$

に一致する．ただし $\boldsymbol{e}_{i_0}$ は，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_1}$ のなかで目的関数値が一番小さくなる点である．

実行可能集合 S の端方向が存在しない場合は，定理 2.5 の条件 (2.25) が自動的に成立するので，S の端点で最適値をとる．一方，条件 (2.25) が成り立たなければ，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_j < 0$ となる方向ベクトル $\boldsymbol{d}_j$ が存在することになる．その結果，目的関数値はいくらでも小さくなって，最適解は存在しないこととなる．

2.5 節の問題

[**1**]　例 2.9 の非負条件付きの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_4 \geqq 0 \end{cases}$$

の実行可能集合が (端) 方向をもたないことを，定理 2.3 により示せ．つまり，すべての基底行列も (2.22) をみたさないことを示せばよい．

2.6　2 段階シンプレックス法

前節までで，線形計画問題の実行可能基底解から出発すれば，シンプレックス法を利用することにより，最適解が求まるか，あるいは，目的関数値がいくらでも小さくなることが判定できた．しかし，初期実行可能基底解はどのようにしてみつければよいのであろうか．本節では，シンプレックス法を工夫して利用することにより，実行可能基底解があれば，そのうちの 1 つをみつけられる方法を紹介する．

まず，線形計画問題に対するシンプレックス法のアルゴリズムの考え方は，実行可能集合 $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ の幾何学的な性質と目的関数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の線形性から次のように組み立てられていた．

- 実行可能集合 S は凸多面集合 (非有界の場合もある)．
- 目的関数は 1 次関数なので，その等高面は等間隔で平行な超平面．
  特に，2 変数の場合の等高線は，等間隔で平行な直線群となっている．
- 最適値をもつならば，最適解は実行可能集合の端点 (頂点) で実現される．
- 実行可能集合の端点に対して，行列 A の基底行列 B と非基底行列 N への分解が一意に対応している．つまり，各端点は実行可能基底解に対応している．
- シンプレックス法は，実行可能集合の端点の 1 つから出発して，隣接する端点へ移動し，最終的に，最適解へたどり着くアルゴリズムである．非有界な実行可能集合の場合は，いくらでも関数値が減少して最適値がないこともある．
- いずれにしても，初期の実行可能基底解を求めること，つまり，実行可能集合の端点をみつけることが必要となる．いい換えると，**基底行列を最初に構成する**ことからはじめなくてはならない．

シンプレックス法を利用する際には，実行可能基底解から出発する必要があり，最初の基底行列が正しくないと先には進めない．基底行列を正しく構成するためには，適当に選んだ列ベクトルの組が基底行列となっているかどうかを確かめる必要がある．どのようにしたら，確実に基底行列となる列ベクトルの組合せが得られるであろうか．これまでは，次のような方法を考えてきた．

- 非基底変数の値を 0 にして連立方程式を解き，基底変数の値が非負の値として定まるかどうか確認する．
- 連立 1 次方程式が 2 本からなる場合は，係数行列の (2 次元の) 列ベクトルを図に表し，それらの 2 つのベクトルを選んで非負 1 次結合で右辺のベクトルを表現できるか考える．
- 不等式制約の場合は，各不等式にそれぞれ異なるスラック変数を挿入して等式に変形することで，自動的に単位行列が構成でき，それが基底行列になっていた．

しかし，制約式 (連立方程式) が 3 本以上となると，列ベクトルのつくる空間が 3 次元以上となり簡単に図示できないので，直感的に実行可能基底解をみつけるのが難しい．また，等式制約ではスラック変数が使えないので，単位行列が自動的に構成できないし，基底変数の組合せを適当に選んでもその基底変数が非負の値として定まるかどうかは，方程式を解いてみないとわからない．

それでは，初期の実行可能基底解を確実に求めることができるのであろうか．じつは，次の **2 段階法**とよばれる計算方法がある．第 1 段階で補助問題を解いて，もとの問題の実行可能基底解を求め，それに対応する基底行列を利用して，第 2 段階でもとの問題の最適解を計算する方法である．この計算方法を **2 段階シンプレックス法**という．

考え方：2 段階シンプレックス法

(1) いくつか変数を人為的に用意して**初期基底行列**を構成する．このとき，係数行列に新しく列を挿入することになるので，その分，変数が増える．これらの変数を**人為変数** (**人工変数**) (artificial variable) という．

(2) **目的関数を人為変数の和とする**補助問題を考える．このようにつくり変えた制約条件のもとで，**人為変数の和を最小化する**補助問題を**人工問題** (artificial problem) という．

(3) **第 1 段階** 人工問題をシンプレックス法で解く．最適値が 0 かどうか判定する．

- もし，もとの問題に実行可能基底解が存在すれば，人為変数は不要で自動的にすべての人為変数の値は 0 となり，その補助問題の最適値は 0 となるはずである．
- また，逆に，もとの問題に実行可能解がなければ，連立 1 次方程式には解がないので，等式では成り立たず，いくつかの人為変数の値が 0 にはならない．よって，人工問題の最適値は 0 にはならないはずである．

(4) 人工問題の最適値が 0 となる場合は第 2 段階へ進む．0 とならない場合は，「最適解なし」とする．

(5) **第 2 段階** 目的関数をもとにもどして，連立 1 次方程式の係数行列を，第 1 段階で変形した最後の表から人為変数に対応した列を除いたものにしてシンプレックス法で計算する．

ここで，第 1 段階のシンプレックス法で解いたときの最後の表 (係数行列) は，挿入した人為変数に対応する列ベクトルを除けば，もとの連立方程式を行基本変形で同値変形したものなので，第 2 段階でもそのまま利用できる．

注意 2.2. 第 1 段階と第 2 段階のシンプレックス法では，最初の基底行列を構成する基本ベクトルが求まっているので制約式の変形の必要はないが，それに対応する目的関数の係数が 0 にはなっていないことが多い．そのため，基本変形の操作により判定項の構成を正しく行う必要がある．つまり，基底変数に対応する目的関数の係数部分を 0 にすることである．

また，第 1 段階の人工問題のつくり方には，次の基本型と省エネ型がある．

考え方：人工問題の連立 1 次方程式のつくり方

基底行列が簡単にみつかる連立 1 次方程式の構成方法は次の 2 通りある．

- **2 段階法 (基本型)**：行数と同じ数の人為変数を用意して，基本ベクトルの形 (単位行列) の基底行列を構成する．
- **2 段階法 (省エネ型)**：もとの係数行列の列ベクトルに基本ベクトルが含まれていれば，真に足りない人為変数だけを挿入することで基底行列を構成する．

以上をまとめると，標準形の線形計画問題

$$
\textbf{(LP)}\quad \left\{\begin{array}{ll} \textbf{Min} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \textbf{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right.
$$

に対して，その人工問題 **(AP)** は以下のようになる．

$$
\textbf{(AP)}\quad \left\{\begin{array}{ll} \textbf{Min} & \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \textbf{s.t.} & A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right. \tag{2.26}
$$

ただし，$\boldsymbol{1} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ はすべての成分が 1 となる列ベクトルで，E は単位行列である．人工問題 **(AP)** において，人為変数を m 個用意したとすれば，$\boldsymbol{y} = \left(y_1, \cdots, y_m\right)^{\mathrm{T}}$ となり，その目的関数は

$$
\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1 \cdot y_1 + \cdots + 1 \cdot y_m = y_1 + \cdots + y_m
$$

となる．機械的に行の数と同じ分だけ用意してもよいが，利用できる列ベクトルがあれば挿入する人為変数の数は少なくできる．

○**例 2.11.** 次の問題を2通りの2段階法で解く方法を考えよう．

$$
\textbf{(LP)}\begin{cases}
\textbf{Min} & 5x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4 \\
\textbf{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 20 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0
\end{cases}
$$

まず，制約式が2本あるので，人為変数として，y_1 と y_2 を用いて次の人工問題がつくれる．

$$
\textbf{(AP1)}\begin{cases}
\textbf{Min} & y_1 + y_2 \\
\textbf{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + y_1 = 10 \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 + y_2 = 20 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0
\end{cases}
$$

また，もとの問題 **(LP)** の連立1次方程式の係数行列の第1列が基本ベクトルの形をしているので，人為変数 y_1 を第2行目に挿入することで，第1列と第5列を基底行列とする連立1次方程式とすることができる．

$$
\textbf{(AP2)}\begin{cases}
\textbf{Min} & y_1 \\
\textbf{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 + y_1 = 20 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,\ y_1 \geqq 0
\end{cases}
$$

このようにして，挿入する人為変数を少なくできる．これが省エネ型である．もちろん，目的関数は y_1 のみであるので，目的関数は $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + y_1$ となり，係数行列の成分を並べると $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ となる． □

○**例 2.12.** 例 2.11 の **(LP)** を2段階シンプレックス法で具体的に解いてみる．

第1段階として，人工問題 **(AP2)** をシンプレックス法で解くと次のようになる．まず，2つの基本ベクトルを基底行列として四角で囲み，注意 2.2 で指摘したように，基底変数に対応する目的関数の係数部分を0にする．つまり，目的関数式に制約第2式の (−1) 倍を加える．すると，判定項が構成できるので，判定項の位置の係数に目印 (⌈⌉) を付ける．その後，以下のようにシンプレックス法を適用して人工問題を解く．

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & 10 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 3 & \boxed{1} & 20 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -20 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & 10 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 3 & \boxed{1} & 20 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ 10/1 = 10 \\ 20/1 = 20 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -10 \\ \hline 1 & \boxed{1} & 2 & 1 & \boxed{0} & 10 \\ -1 & \boxed{0} & -1 & 2 & \boxed{1} & 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ 10/1 = 10 \\ 10/2 = 5 \end{array}$$

Stop!　**(LP)** に**実行可能解あり**

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3/2 & \boxed{1} & 5/2 & \boxed{0} & -1/2 & 5 \\ -1/2 & \boxed{0} & -1/2 & \boxed{1} & 1/2 & 5 \end{array}$$

次に，第 2 段階の計算を行う．目的関数をもとにもどして，連立 1 次方程式の係数行列を第 1 段階で変形した最後の表から人為変数に対応した第 5 列を除いた拡大係数行列をつくる．

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 11 & 15 & 0 \\ \hline 3/2 & \boxed{1} & 5/2 & \boxed{0} & 5 \\ -1/2 & \boxed{0} & -1/2 & \boxed{1} & 5 \end{array}$$

7 と 15 を 0 にするために，目的関数式に制約第 1 式の (-7) 倍と制約第 2 式の (-15) 倍を加える．

$$\Longrightarrow \begin{array}{cccc|c} \boxed{A} & 0 & \boxed{B} & 0 & \boxed{C} \\ \hline 3/2 & \boxed{1} & 5/2 & \boxed{0} & 5 \\ -1/2 & \boxed{0} & -1/2 & \boxed{1} & 5 \end{array}$$

$$A = 5 + \frac{3}{2} \times (-7) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-15) = 2$$
$$B = 11 + \frac{5}{2} \times (-7) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-15) = 1$$
$$C = 0 + 5 \times (-7) + 5 \times (-15) = -110$$

Stop!

$$\Longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & -110 \\ \hline 3/2 & \boxed{1} & 5/2 & \boxed{0} & 5 \\ -1/2 & \boxed{0} & -1/2 & \boxed{1} & 5 \end{array}$$

最適値は 110.

最適解は

$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5.$　□

2.6 節の問題

[**1**]　次の線形計画問題について，以下の各問いに答えよ．

$$\textbf{(LP)} \begin{cases} \textbf{Min} & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ \textbf{s.t.} & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0 \end{cases}$$